Exercice 1 (3 points) :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,;\,\vec{k}\right)$, on considère la sphère (S) de centre $\Omega(2\,,1\,,2)$ de rayon 3 et le plan (P) passant par le point A(-1 , 0 , 3) et dont $\vec{u}(4\,,0,-3)$ est un vecteur normal

0,5 1) Montre qu'une équation de (S) est : $x^2+y^2+z^2-4x-2y-4z=0$

0,5 2) Vérifier qu'une équation du plan (P) est : $4x-3z+13=0$

0,5 3) a) Vérifier que : $\begin{cases} x=2+4t \\ y=1 \\ z=2-3t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point Ω et orthogonale au plan (P)

0,5 b) Déterminer les coordonnées de H points d'intersection de la droite (Δ) et du plan (P)

0,25 4) a) Calculer $d(\Omega\,,(P))$

0,75 b) Montrer que le plan (P) est tangent à la sphère (S) en un point l'on déterminera

Exercice 2 (3points) :

0,75 1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexe l'équation : $z^2-2\sqrt{2}z+4=0$

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,,\vec{u}\,,\vec{v})$, on considère le point A d'affixe $a=\sqrt{2}(1--i)$ et la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$

0,25 a) Ecrire a sous forme trigonométrique

0,5 b) Vérifier que l'affixe du point B image du point A par la rotation R est : $b=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$

0,5 3) a) On considère le point C d'affixe c = 1 + i , montrer que : $b^2-c^2=2\sqrt{3}$

0,5 b) Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$ et D l'image du point B par la translation t montrer que : $OD=|b+c|$

0,5 c) En déduire que : $OD\times BC=2\sqrt{3}$

Exercice 3 (3 points) :

Une urne contient 12 boules indiscernables au toucher : 3 boules de couleur rouge portant chacune le nombre 1 , et 3 boules de couleur rouge portant chacune le nombre 2, et 6 boules de couleur verte portant chacune le nombre 2

On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne. On considère les événements suivants :

A : « Obtenir deux boules portant le même nombre »

B : « Obtenir deux boules de couleur différentes »

C : « Obtenir deux boules portant deux nombres dont la somme est égale à 3 »

1,5 1) Montrer que : $p(A)=\frac{13}{22}$ et $p(B)=\frac{6}{11}$ et calculer p(C)

0,5 2) a) Montrer que : $p(A \cap B) = \frac{3}{11}$

0,5 b) Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier la réponse ?

0,5 3) Sachant que l'événement B est réaliser, calculer la probabilité d'obtenir deux boules portant le même nombre

Exercice 4 (2 points) :

0,5 1) a) Montrer que la fonction : $H : x \mapsto xe^x$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \longmapsto (x+1)e^x$ sur $\mathbb{R}$

0,5 b) En déduire que : $\int_0^1 (x+1)e^x dx = e$

1 2) En utilisant une intégration par parties, calculer $\int_0^1 (x^2 + 2x - 1)e^x\, dx$

Problème (9 points) :

I. Soit g la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = x^3 - 1 - 2\ln^2(x) + 2\ln(x)$

Le tableau ci-contre est le tableau de variations de De la fonction g sur l'intervalle $]0, +\infty[$

x	0	$+\infty$
g'(x)	+	
g(x)	$-\infty$ ↗	$+\infty$

0,25 1) Calculer g(1)

0,5 2) A partir de ce tableau, déterminer le signe de g(x) Sur chacun des intervalles $]0,1]$ et $[1, +\infty[$

II. On considérée la fonction numérique f définie sur L'intervalle $]0, +\infty[$ par : $f(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2} + \left(\ln\frac{x}{x}\right)^2$

Soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$

0,5 1) a) Vérifier que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

0,5 b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$

0,25 c) Déterminer la position relative de la droite (D) et de la courbe (C_f)

0,75 2) Montrer que : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ et interpréter géométriquement le résultat

1 3) a) Montrer que : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$

0,5 b) Montrer que la fonction f est décroissante sur $]0,1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$

0,5 c) Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $]0, +\infty[$

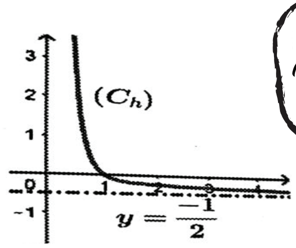
1 4) Construire dans le repère $(O ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$ la droite (D) et la courbe (C_f) (unité : 1 cm)

III. On considère la fonction numérique h définie sur $]0, +\infty[$ par : $h(x) = f(x) - x$

0,25 1) a) Vérifier que : $h(1) = 0$

0,75 b) Dans le figure ci-contre (C_g) est la représentation graphique de la fonction h

Déterminer le signe de h(x) sur chacun des intervalles $]0,1]$ et $[1, +\infty[$ puis en déduire que $f(x) \leq x$ Pour tout x de $[1, +\infty[$



2) On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = e$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0,75 a) Montrer par récurrence que : $1 \leq u_n \leq e$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0,75 b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante (on pourra utiliser le résultat de la question III)1)b))

0,75 c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite